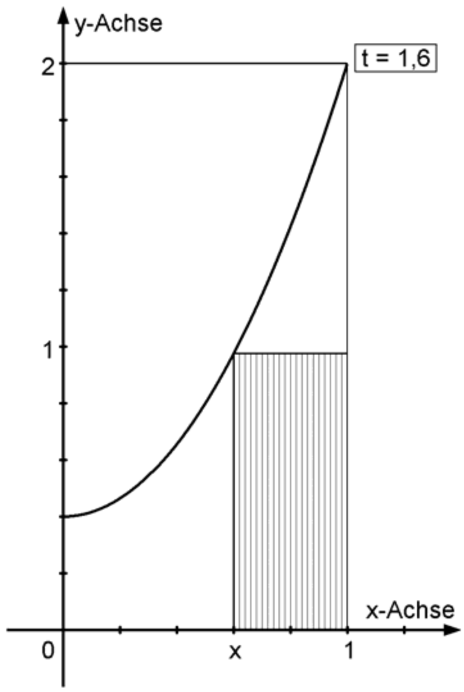
LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE	I.
	1. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto (x-1) \cdot \ln x$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
	Hinweis: $\lim\limits_{x \to 0+} (x^n \cdot \ln x) = 0$, für $n \in \mathbb{N}$, darf ohne Beweis verwendet werden.
3	a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge.
5	b) Weisen Sie nach, dass G_f an der Stelle $x = 1$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f. [Zur Kontrolle: $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$]
5	c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f. Berechnen Sie $f(3)$ und skizzieren Sie G_f aufgrund der bisherigen Ergebnisse.
4	d) Begründen Sie, dass f im Intervall $]0;1]$ umkehrbar ist. Geben Sie Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0+} g'(x)$.
8	e) G_f und die Koordinatenachsen begrenzen für $x \leq 1$ ein Flächenstück, das sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück den endlichen Inhalt 0,75 hat.
	2. Aus rechteckigen Kunststoffplatten von 1 Meter Breite und 2 Meter Höhe wurden Stücke abgeschnitten, wobei die Schnittkurve p_t Teil einer Parabel ist, die der Gleichung $y = tx^2 + 2 - t$ genügt. Für den Parameter t gilt: $0 < t \leq 2$. In nebenstehender Skizze ist der Fall $t = 1{,}6$ dargestellt.
3	a) Zeigen Sie, dass jede Schnittkurve p_t durch den Punkt $(1 \vert 2)$ verläuft. Beschreiben Sie die Bewegung des Parabelscheitels, wenn t bei 2 beginnend alle Werte des Intervalls $]0;2]$ durchläuft.



(Fortsetzung nächste Seite)

BE

Aus der Restplatte werden Rechtecke – wie in der Skizze schraffiert dargestellt – ausgeschnitten. Je eine Seite des Rechtecks soll auf dem unteren bzw. auf dem rechten Rand der Platte zu liegen kommen, eine Ecke des Rechtecks soll auf der Schnittkurve liegen.

3 b) Zeigen Sie, dass für den Inhalt eines solchen Rechtecks gilt:

$$A_t(x) = -tx^3 + tx^2 + (t-2)x + 2 - t \quad (0 \le x \le 1).$$

Der Inhalt A_t des ausgeschnittenen Rechtecks soll möglichst groß sein (Extremwertproblem).

6 c) Die unten stehende Abbildung zeigt einige Graphen der Scharfunktionen A_t. Beschreiben Sie, was aufgrund der Abbildung im Fall $0 < t < 1{,}5$ für die Lösung des Extremwertproblems zu vermuten ist. Beweisen Sie Ihre Vermutung rechnerisch.

3 d) Im Fall $t = 1{,}6$ ist die erste Ableitung von A_t an den Stellen $x_1 = \frac{1}{6}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$ gleich Null (Nachweis nicht erforderlich). Bestätigen Sie durch Berechnung geeigneter Werte von A_t, dass für $t = 1{,}6$ zwei Rechtecke den maximalen Flächeninhalt aufweisen.

40