GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer rationalen Funktion f der Form $f(x) = \frac{x+a}{bx}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2 a) Einziger Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist $A(-1|0)$, außerdem verläuft G_f durch den Punkt $B(1|1)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f.

[Ergebnis: $f(x) = \frac{x+1}{2x}$]

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto \ln f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_g. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

7 b) Begründen Sie anhand des Verlaufs von G_f, dass gilt: $D_g = \mathbb{R} \setminus [-1;0]$.
Untersuchen Sie das Verhalten von G_g an den Rändern von D_g.
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an.

7 c) Ermitteln Sie die Nullstelle von g und untersuchen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung das Monotonieverhalten von g.

[Zur Kontrolle: $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$]

9 d) Bestimmen Sie die Stelle x_0, an der die Funktionen f und g in der ersten Ableitung übereinstimmen.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f in $P(x_0 | f(x_0))$ sowie die Gleichung der Tangente an G_g in $Q(x_0 | g(x_0))$.
Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente in P.

[Ergebnis für die Gleichung der Tangente in P: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$]

7 e) Berechnen Sie $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0{,}1)$ und $g(4)$. Zeichnen Sie den Graphen G_g sowie seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in die nebenstehende Abbildung ein. Tragen Sie auch die Tangenten in P und Q ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	Die Funktion $G: x \mapsto x \cdot g(x) + \ln(x+1)$ ist für $x > 0$ eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich).
8	f) Die Tangenten in P und Q schließen mit den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ ein Parallelogramm ein. Der Graph von g teilt dieses Parallelogramm in zwei Teilflächen. Wie viel Prozent der Parallelogrammfläche nimmt die Teilfläche unterhalb von G_g ein?
40