GM1. INFINTESIMALRECHNUNG

BE

I.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion

$f: x \mapsto 2 \cdot \dfrac{e^x - 4}{e^x + 4}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

4 1. a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S von G_f mit der y-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.
(Hinweis: Zur Bestimmung des Grenzwerts für $x \to +\infty$ kann z. B. zunächst im Zähler und Nenner e^x ausgeklammert werden.)

5 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f mit Hilfe der ersten Ableitung.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = 16 \cdot \dfrac{e^x}{(e^x + 4)^2}$]

7 c) $W(\ln 4 \mid 0)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen G_f (Nachweis nicht verlangt). Zeigen Sie, dass die Gerade n mit der Gleichung $y = -x + \ln 4$ durch W verläuft und auf der Wendetangente senkrecht steht.
Ergänzen Sie n in nebenstehender Abbildung.
Berechnen Sie den Abstand des Ursprungs von der Geraden n.

3 2. a) Begründen Sie, dass f umkehrbar ist, und geben Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} an.

3 b) Zeichnen Sie den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion in die nebenstehende Abbildung ein.

4 c) Geben Sie jeweils ein Beispiel an für den Term
– einer Funktion g mit $D_g = \mathbb{R}$, die wie f die Nullstelle $\ln 4$ hat, aber nicht umkehrbar ist;
– einer Funktion h mit $D_h = \mathbb{R}$, die wie f die Nullstelle $\ln 4$ hat und umkehrbar ist, deren Umkehrfunktion aber in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

4 3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 4 \cdot \ln(e^x + 4) - 2x$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	b) Der Schnittpunkt von G_f und $G_{f^{-1}}$ hat näherungsweise die Koordinaten $(-1{,}8 \mid -1{,}8)$. Kennzeichnen Sie in der Abbildung die Fläche, deren Inhalt durch $A = \int_{-1{,}8}^{\ln 4} (x - f(x))\,dx$ angenähert wird. Berechnen Sie A.
4	c) Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses für A einen Näherungswert für den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f, $G_{f^{-1}}$ und der Geraden n eingeschlossen wird.
40	

Zu Aufgabe GM1.I

Die Angabe ist mit abzugeben.

Name:..
(vom Prüfling einzutragen)