

**LM1. INFINITESIMALRECHNUNG**

**I.**

BE

6

1. a) Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen

$$g : x \mapsto \frac{e^x}{2}, \quad g^* : x \mapsto \frac{e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad f_1 : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeichnen Sie mit Hilfe der Funktionswerte  $g(-1)$ ,  $g(1)$  und  $g(2)$  den Graphen von  $g$  im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$  in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 2 cm.

Erläutern Sie, wie der Graph von  $g^*$  aus dem Graphen von  $g$  und schließlich der Graph von  $f_1$  aus den Graphen von  $g$  und  $g^*$  entsteht. Zeichnen Sie die Graphen von  $g^*$  und  $f_1$  in das vorhandene Koordinatensystem.

Die Funktion  $f_1$  gehört der Funktionenschar  $f_k : x \mapsto \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$  mit  $D = \mathbb{R}$

und  $k \in \mathbb{R}^+$  an. Der Graph von  $f_k$  wird mit  $G_k$  bezeichnet.

5

b) Welches Symmetrieverhalten weist  $G_k$  auf?

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von  $f_k$  und geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes an.

6

c) Nun wird die Integralfunktion  $F_k : x \mapsto \int_0^x f_k(t) dt$  mit dem Definitiv-

onsbereich  $\mathbb{R}$  betrachtet.

Bestimmen Sie ohne Berechnung der integralfreien Darstellung von  $F_k$  das Symmetrie-, Monotonie- und Krümmungsverhalten des Graphen von  $F_k$  (kurze Begründung).

8

d) Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von  $F_1(x)$  und zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung  $[f_1(x)]^2 = 1 + [F_1(x)]^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Konstruieren Sie mittels dieser Beziehung den Wert  $J$  des Integrals

$\int_0^2$

$f_1(x) dx$  als Streckenlänge in Ihrer Zeichnung und markieren Sie die

$0$

zugehörige Strecke farbig.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE
4
5
6
40

2. a) Ermitteln Sie die beiden Stellen  $x_1$  und  $x_2$ , an denen die Funktion  $f_1$  den Wert  $m$  ( $m > 1$ ) annimmt.

$$[\text{Ergebnis: } x_{1/2} = \ln(m \pm \sqrt{m^2 - 1})]$$

b) Lässt man das im 1. Quadranten liegende, von  $G_1$ , der positiven  $y$ -Achse und der Geraden mit der Gleichung  $y = 10$  begrenzte Flächenstück um die  $y$ -Achse rotieren, entsteht ein kelchförmiger Körper. Berechnen Sie dessen Durchmesser  $d$  am oberen Rand. Geben Sie einen Ansatz für das Volumen  $V$  des Kelches an (Berechnung ist nicht verlangt).

3. Die Spannweite am Boden (Außenmaße) und die Höhe des 1965 in St. Louis, Missouri, errichteten Gateway Arch betragen jeweils 631 feet. Das Foto zeigt eine Schrägansicht des Bogens. In einem Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 foot kann die äußere Begrenzung des Bogens durch einen umgedrehten Graphen  $G_k$  angenähert werden. Erstellen Sie einen Ansatz zur Berechnung von  $k$  und zeigen Sie, dass der Wert  $k = 2^{-7}$  eine gute Näherungslösung ist.

