GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto e^{1-x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

4 1. a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

9 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes sowie die Lage der Wendepunkte von G_f.

4 c) Berechnen Sie $f(1)$ und $f(2)$.
Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \le x \le 2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).

2. Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $h: x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ mit $D_h = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

8 a) Geben Sie die Wertemenge von h an und bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_f und G_h.
Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_h im Bereich $-1{,}5 \le x \le 1{,}5$ in das obige Koordinatensystem ein.

4 b) Ermitteln Sie den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche näherungsweise, indem Sie den Flächeninhalt eines geeigneten Drachenvierecks berechnen. Zeichnen Sie das verwendete Drachenviereck in das oben verwendete Koordinatensystem ein.

5 c) Bestimmen Sie für die quadratische Funktion $p: x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $D_p = \mathbb{R}$ die Parameter a, b und c so, dass der Graph von p im Punkt $S(0\,|\,e)$ seinen Scheitel hat und durch die Punkte $A(-1\,|\,1)$ und $B(1\,|\,1)$ verläuft. [Ergebnis: $p(x) = (1-e)x^2 + e$]

6 d) Der Graph der quadratischen Funktion $q: x \mapsto \left(1 - \frac{1}{e}\right)x^2 + \frac{1}{e}$ mit $D_q = \mathbb{R}$ hat seinen Scheitel im Punkt $T\left(0\,|\,\frac{1}{e}\right)$ und verläuft durch die Punkte $A(-1\,|\,1)$ und $B(1\,|\,1)$ (Nachweis nicht verlangt).
Berechnen Sie nun näherungsweise den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche, indem Sie die Funktionen p und q als Näherungen für die Funktionen f und h verwenden.

40