GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

1. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A(1|-3|-3)$, $B(2|1|-2)$ und $D(5|-5|1)$ sowie die beiden folgenden Geraden gegeben:

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Geraden g und h legen eine Ebene H fest.

5 a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene H in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 13 = 0$]

6 b) Vom Punkt B aus wird auf die Gerade g ein Lot gefällt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes C und zeigen Sie, dass BC auch eine Lotgerade zur Ebene H ist. [Teilergebnis: C(3/–1/–4)]

5 c) Zeigen Sie, dass die Ebene $E_1: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ senkrecht auf der Ebene H steht und das Dreieck ABC enthält.

2. Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche des dreiseitigen Prismas ABCDEF mit der Strecke [AD] als einer Seitenkante.

6 a) Zeigen Sie, dass AD senkrecht auf der Ebene E_1 steht, und berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte E und F. Fertigen Sie eine Skizze des Prismas an.

3 b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_2, welche die Deckfläche des Prismas enthält, in Normalenform.

4 c) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und berechnen Sie das Volumen des Prismas.

4 d) Die Ebene, die durch die Punkte A, B und F bestimmt ist, zerlegt das Prisma in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie das Verhältnis der Rauminhalte dieser Teilkörper.

7 e) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, das Prismenvolumen durch Schnitt des Prismas mit einer Ebene zu halbieren. Beschreiben Sie dazu genau die Lage der jeweiligen Schnittebene und geben Sie die Gleichungen der beiden Ebenen in Parameter- oder Normalenform an.

40