BE

II.

Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k\colon\ x \mapsto kx \cdot \sqrt{4-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge D_k. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

4 1. a) Bestimmen Sie D_k, das Verhalten von g_k an den Rändern von D_k und die Nullstellen von g_k.

6 b) Bestätigen Sie, dass im Inneren von D_k gilt: $g_k'(x) = \dfrac{k\,(8-3kx)}{2\sqrt{4-kx}}$.

Bestimmen Sie den Kurvenpunkt mit horizontaler Tangente und berechnen Sie $g_k'(0)$.

4 c) Begründen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass der in Aufgabe 1b ermittelte Kurvenpunkt Hochpunkt von G_k ist. Geben Sie die Wertemenge von g_k an.

7 d) Untersuchen Sie das Verhalten von g_k' bei Annäherung an den rechten Rand von D_k. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ und G_1 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

5 e) G_k und die positive x-Achse schließen das Flächenstück A_k ein. Berechnen Sie das Volumen V_k des Rotationskörpers R_k, der bei Rotation von A_k um die x-Achse entsteht. [Zur Kontrolle: $V_k = \frac{64}{3k}\pi$]

Der Graph H_k der Funktion $h_k\colon\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{x\cdot(4-kx)}{k}}$ mit $k > 0$ und Definitionsmenge $[0; \frac{4}{k}]$ ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{2}{k} \mid 0)$ und dem Radius $\frac{2}{k}$ (Nachweis nicht erforderlich).

2 2. a) Zeichnen Sie $H_{0,5}$ und H_1 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1d ein.

6 b) Zeigen Sie, dass für $k \leq 0{,}5$ die Graphen G_k und H_k genau zwei gemeinsame Punkte haben. [Hinweis: Ausschluss eines dritten Schnittpunktes für $k < 0{,}5$ durch Betrachtung der Definitionsmenge]

6 c) Wenn H_k um die x-Achse rotiert, entsteht die Kugel K_k. Für $k \leq 0{,}5$ lässt sich aus dem Rohling K_k durch geeignetes Abschleifen der Rotationskörper R_k (vgl. Teilaufgabe 1e) herstellen.
Begründen Sie, für welches k das Verhältnis der Volumina von R_k und K_k am günstigsten, also der Volumenanteil des Abfalls kleinstmöglich ist.
Für welches k entstehen genau 50 % Abfall?

40