

## LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

### I.

Gegeben ist die Schar der Funktionen  $f_k: x \mapsto \ln\left(\frac{x}{k} + \frac{k}{x}\right)$  mit  $k \in \mathbb{R}^+$  und Definitionsmenge  $D_k = \mathbb{R}^+$ . Der Graph von  $f_k$  wird mit  $G_k$  bezeichnet.

- 2 1. a) Bestimmen Sie das Verhalten von  $f_k$  an den Rändern von  $D_k$ .
- 6 b) Bestätigen Sie, dass gilt:  $f_k'(x) = \frac{x^2 - k^2}{x \cdot (x^2 + k^2)}$ .  
Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts von  $G_k$ .
- 4 c) Berechnen Sie für  $k \neq 1$  die Koordinaten des Schnittpunktes  $S_k(x_S | y_S)$  von  $G_1$  und  $G_k$  in Abhängigkeit von  $k$ . [Teilergebnis:  $x_S = \sqrt{k}$ ]
- 5 d) Zeichnen Sie die Graphen  $G_1$  und  $G_4$ . Berechnen Sie dazu die Funktionswerte an geeigneten Stellen und berücksichtigen Sie alle bisherigen Ergebnisse.
- 3 2. a) Zeigen Sie, dass gilt:  $f_1'(x_S) + f_k'(x_S) = 0$  (mit  $x_S$  aus Teilaufgabe 1c).
- 6 b) Die Tangenten  $t_1$  und  $t_k$  an die Graphen  $G_1$  und  $G_k$  im Punkt  $S_k$  begrenzen zusammen mit der  $x$ -Achse ein Dreieck. Begründen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist. Berechnen Sie für  $k = 4$  die Innenwinkel des Dreiecks (auf eine Dezimale gerundet).
3. Für  $x \in ]0; 1]$  gilt die Ungleichungskette:  $-\ln x \leq f_1(x) \leq \ln(x+1) - \ln x$  (Nachweis nicht erforderlich).
- 8 a) Der Graph  $G_1$ , die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$  begrenzen ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück  $J$ . Zeigen Sie mit Hilfe obiger Ungleichungskette, dass  $J$  einen endlichen Inhalt hat, dessen Wert in  $[1; 2\ln 2]$  liegt.  
(Hinweis:  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  kann ohne Nachweis verwendet werden.)
- 6 b) Gegeben ist die Integralfunktion  $F: x \mapsto \int_1^x f_1(t) dt$  mit  $x \in \mathbb{R}^+$ .  
Der Graph von  $F$  wird mit  $G_F$  bezeichnet.

In einem der folgenden Diagramme ist  $G_F$  richtig gezeichnet. Geben Sie für jedes der anderen Diagramme einen Grund an, warum es sich nicht um  $G_F$  handeln kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

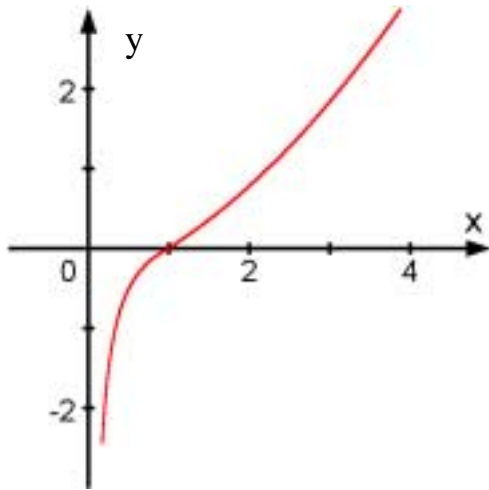


Diagramm 1

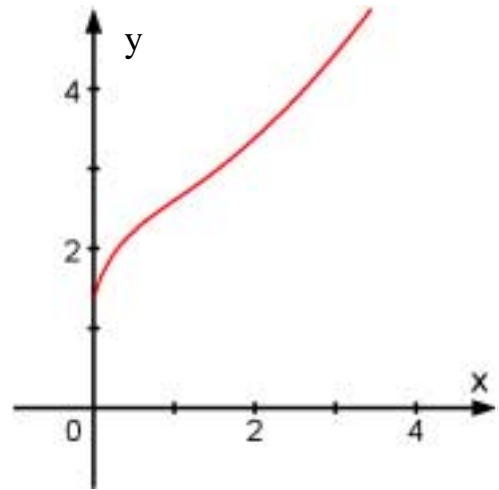


Diagramm 2

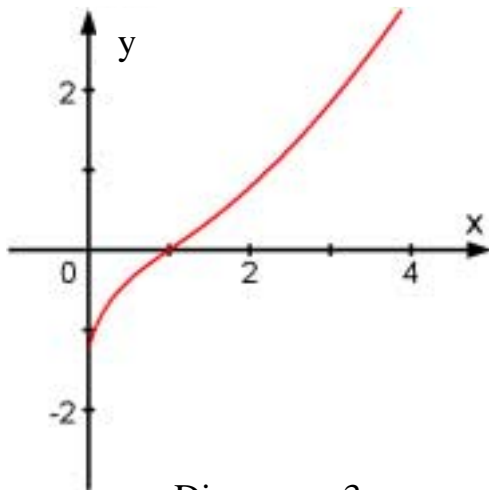


Diagramm 3

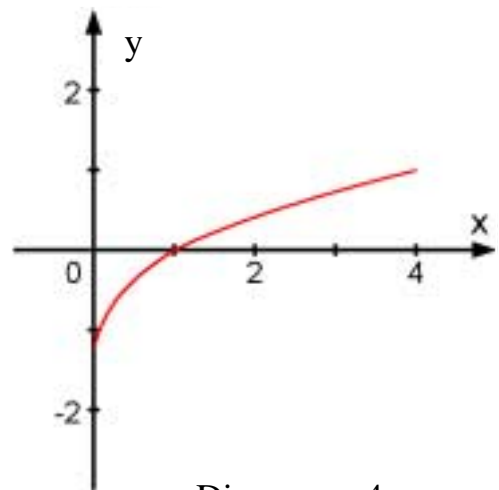


Diagramm 4

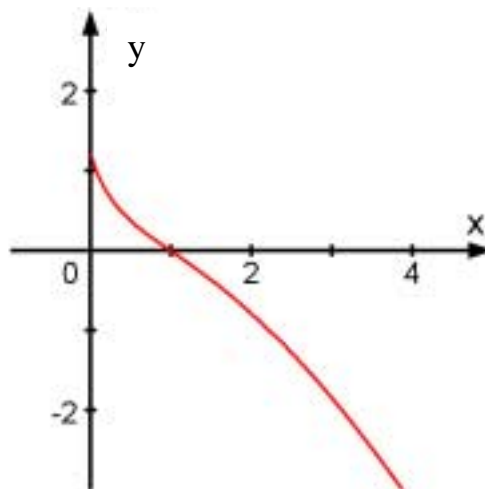


Diagramm 5