GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

BE

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \ln(4+x) - \ln(4-x)$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-4;4[$. G_f bezeichnet den Graphen von f.

3 1. a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

2 b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft.

8 c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.
Weisen Sie nach, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt und berechnen Sie dessen Koordinaten. $\left[\text{Zur Kontrolle: } f'(x) = \frac{8}{16-x^2}\right]$

5 d) Berechnen Sie f(-3), f(-2) und $f'(0)$. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1cm).

7 e) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} mit $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie den Funktionsterm von f^{-1}.
Zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d.

2. Gegeben ist außerdem die Funktion $g\colon x \mapsto \ln(4+x)$ mit $D_g =]-4;4[$.
Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

3 a) Zeigen Sie, dass G_f und G_g genau einen gemeinsamen Punkt $S(x_S|y_S)$ haben, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.
[Zur Kontrolle: $x_S = 3$]

4 b) Zeigen Sie, dass G_f für $x \in]-4;3[$ unterhalb und für $x \in]3;4[$ oberhalb von G_g verläuft.

5 c) Beweisen Sie, dass $K\colon x \mapsto -x - (4-x)\cdot\ln(4-x)$ mit $D_K =]-4;4[$ eine Stammfunktion von $g - f$ ist, und berechnen Sie
$$J_1 = \int_0^1 [g(x) - f(x)]dx$$
auf zwei Dezimalen genau.

3 d) Begründen Sie, für welchen Wert $t \in]-4;4[$ das Integral
$$J_t = \int_0^t [g(x) - f(x)]dx$$
den größten Wert annimmt.

40