

BE

VI.

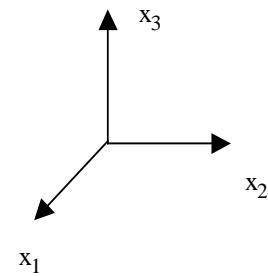
In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind die Punkte $A(10|0|0)$, $B(0|10|0)$ und die Ebenenschar $H_a: ax_1 - x_3 = 0$, $a \in \mathbb{R}^+$ gegeben. F_a ist der Fußpunkt des von A aus auf die Ebene H_a gefällten Lots. Der Lotfußpunkt F_a , der Koordinatenursprung O und die Punkte A und B bilden die Ecken des Tetraeders $OABF_a$. Dieses Tetraeder ist nicht regulär, d. h., die Kanten sind nicht alle gleich lang.

4 1. a) Begründen Sie, dass alle Ebenen H_a die x_2 -Achse enthalten.
Welche Ebene erhält man für $a \rightarrow +\infty$?

5 b) Berechnen Sie die Koordinaten von F_a .

$$[\text{Ergebnis: } F_a \left(\frac{10}{1+a^2} \mid 0 \mid \frac{10a}{1+a^2} \right)]$$

3 c) Zeichnen Sie das Tetraeder $OABF_a$ für $a = 2$ in ein Schrägbild des Koordinatensystems ein (Querformat, Ursprung in der Blattmitte).



4 d) Begründen Sie, dass alle Seitenflächen des Tetraeders $OABF_a$ rechtwinklige Dreiecke sind.

7 e) Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt M des (rechtwinkligen!) Dreiecks OAB. Begründen Sie ohne Rechnung, dass M auch Mittelpunkt der Kugel ist, auf der alle Ecken des Tetraeders $OABF_a$ liegen. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.

6 2. a) Berechnen Sie das Tetraedervolumen V_a und begründen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^+$ gibt, für das V_a maximal wird.

7 b) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Ebene H_a , die den Mittelpunkt N der Strecke $[AF_2]$ enthält. Diese Ebene schneidet das Tetraeder $OABF_2$ und zerlegt es in zwei Teilkörper. Kennzeichnen Sie die entstandene Schnittfläche im Schrägbild aus Teilaufgabe 1c. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Volumina der beiden Teilkörper stehen.

4 c) In welchem Verhältnis teilt die Ebene $H_{\frac{1}{3}}$ den Winkel zwischen den an der Kante $[OB]$ zusammenstoßenden Seitenflächen des Tetraeders $OABF_2$?