Fachabitur 2023 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Teilaufgabe 1.

Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = [-3; 3]$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

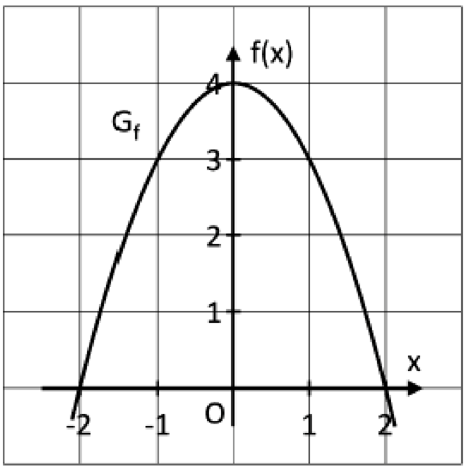
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g.

Teilaufgabe 2.

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Die Funktion F mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_F bezeichnet.
Beschreiben Sie den Globalverlauf des Graphen G_F in Worten. Gehen Sie auch auf das Monotonieverhalten, die Lage und die Art der Extremstellen sowie auf die Lage der Wendestelle von F ein.

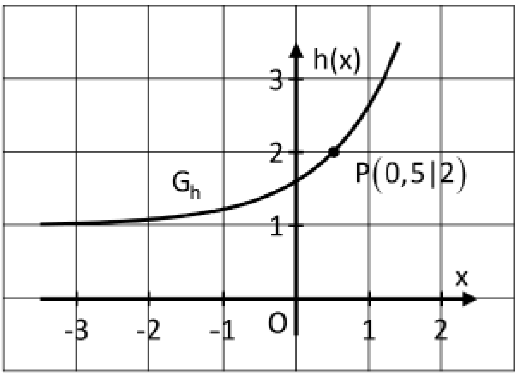
Teilaufgabe 3. (3 BE)

Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen.

$(e^x)^2 - 25 = 0$

Teilaufgabe 4.

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer Exponentialfunktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Der zugehörige Funktionsterm besitzt die Form $h(x) = e^{x+d} + y_0$ mit $d, y_0 \in \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung nachvollziehbar die Werte der Parameter d und y_0.

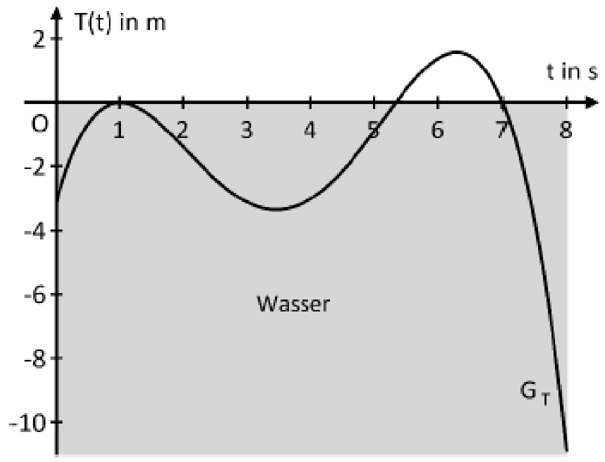
Teilaufgabe 4.2 (2 BE)

Entscheiden Sie anhand des Graphen der Funktion h, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen dazu in der Abbildung unter 4.

$$\int_{-1}^{1} (2 - h(x))\ \mathrm{dx} > 0$$

Teilaufgabe 5.

Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht.
Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasser- oberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion T beschreiben.
Der Graph der Funktion T wird mit G_T bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im untenstehenden Koordinatensystem abgebildet.
Die Funktion T ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche.



Teilaufgabe 5.1 (2 BE)

Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen G_T den Bewegungsablauf des Delfins im Bereich von $t \approx 5,3$ bis $t = 7$ und erläutern Sie, ob für die Funktion T das Intervall $[0; \infty[$ für den beschriebenen Sachverhalt eine sinnvolle Definitionsmenge ist.

Teilaufgabe 5.2 (4 BE)

Der Leitkoeffizient im Funktionsterm von T ist gegeben durch $a = -\frac{1}{12}$. Zudem ist bekannt, dass G_T den Schnittpunkt $S\left(0|-\frac{28}{9}\right)$ mit der Ordinatenachse besitzt.
Die zwei ganzzahligen Nullstellen von T können der Zeichnung entnommen werden. Berechnen Sie den exakten Wert der fehlenden Nullstelle von T.

Teilaufgabe 5.3

Die Funktion T ist gegeben durch die Funktionsgleichung

$$T(t) = -\frac{1}{12}\left(t^4 - \frac{43}{3}t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3}\right)$$

mit der Definitionsmenge $D_T = [0; 8]$.
Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

Teilaufgabe 5.3.1 (9 BE)

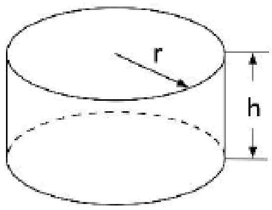
Bestimmen Sie die Wertemenge W_T der Funktion T und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 5.3.2 (6 BE)

Für $t \in]1; 5,3[$ befindet sich der Delfin unter Wasser. Ermitteln Sie rechnerisch, ob in diesem Zeitintervall der Betrag der größten Abtauchgeschwindigkeit größer als der Betrag der größten Auftauchgeschwindigkeit ist.

Teilaufgabe 6.

An einem Küstenabschnitt stranden immer wieder Delfine. Diese werden in einer Auffangstation gesund gepflegt, bis sie wieder in freier Natur überleben können. Um die Kapazität der Auffangstation zu erhöhen, soll ein zusätzliches Becken aus Edelstahl angefertigt werden, welches die Form eines geraden Kreiszylinders hat und nach oben offen ist.



Dazu steht ein begrenzter Vorrat an Edelstahlblechen zur Verfügung. Diese haben modellhaft insgesamt eine Fläche von 180π m^2. Aus Platzgründen kann das Becken nur einen maximalen Durchmesser von 20 m haben.

Die Funktion $V : r \mapsto V(r)$ beschreibt die Maßzahl des Volumens des Beckens in Kubikmetern in Abhängigkeit vom Radius r in Metern.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.

Teilaufgabe 6.1 (5 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf. Begründen Sie, dass für die mathematisch maximale Definitionsmenge der Funktion V gilt: $D_V =]0; 10]$

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{2}\pi\, r^3 + 90\pi\, r$]

Teilaufgabe 6.2 (7 BE)

Zeigen Sie, dass unter den oben genannten Vorgaben das Becken für einen Radius von $r = 2\sqrt{15}$ den maximalen Rauminhalt aufweist. Überprüfen Sie anschließend, ob dieses Becken für eine vorübergehende Haltung von drei Delfinen ausreicht, wenn pro Delfin 360 m^3 Wasser zur Verfügung stehen sollen.

Teilaufgabe 6.3 (2 BE)

Berechnen Sie für den unter 6.2 gegebenen Beckenradius die Größe der Grundfläche des Beckens A_0 in Quadratmetern.

[Ergebnis: $A_0 \approx 188,5\text{m}^2$]

Teilaufgabe 6.4

Ein zu Beginn (Zeitpunkt $t_0 = 0$) 0,5 m^2 großer Algenteppich, der sich am Boden des Beckens mit der Grundfläche A_0 (siehe 6.3) gebildet hat, verdoppelt seine Fläche täglich.

Teilaufgabe 6.4.1 (2 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $A : t \mapsto A(t)$ auf, welche die Fläche des Algenteppichs in Quadratmetern in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen angibt. Für die Definitionsmenge der Funktion A gilt $D_A = [0; 8]$.

Teilaufgabe 6.4.2 (6 BE)

Zeigen Sie, dass sich die Wachstumsfunktion A näherungsweise durch die Funktionsgleichung $\tilde{A}(t) = 0,5 \cdot e^{0,6931 \cdot t}$ mit $D_{\tilde{A}} = D_A$ darstellen lässt und berechnen Sie damit, nach wie vielen Tagen zwei Drittel der gesamten Grundfläche des Beckens von Algen bedeckt wären, wenn nicht eingegriffen würde. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Tage.