Fachabitur 2011 Mathematik T Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \dfrac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen und ihr Graph keine Extrempunkte besitzt.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$]

Teilaufgabe 1.3 (9 BE)

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f, ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes W und stellen Sie die Gleichung der Tangente w an den Graphen von f im Wendepunkt W auf.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f mit der Tangente w für $-3 \leq x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.
[Teilergebnis: $W(0;2)$]

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 3x - \ln(1+e^{2x})$, $x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f ist.

Der Graph von f, die Tangente w und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $u \geq 2$ schließen ein Flächenstück A_u ein.

Teilaufgabe 1.6.1 (4 BE)

Kennzeichnen Sie für $u = 2$ das Flächenstück A_2 im Schaubild der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A.
[Teilergebnis: $A \approx 0{,}675$]

Teilaufgabe 1.6.2 (6 BE)

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren u näherungsweise so, dass das Flächenstück A_u gleich große Flächenanteile oberhalb und unterhalb der x-Achse besitzt. Benutzen Sie $u_0 = 4$ als Startwert und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

Gegeben ist ferner in der maximalen Definitionsmenge D_g eine Funktion $g : x \mapsto a \cdot \ln(b\,x + c) + 2$, bei der die reellen, von null verschiedenen Koeffizienten a, b und c dadurch festgelegt sind, dass der Graph dieser Funktion durch den Punkt $P(0;2)$ verläuft, dort die Steigung 1 und an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung 3 besitzt.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

[Ergebnis: $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{2}{3}$; $c = 1$]

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_g.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion g streng monoton ist.

Teilaufgabe 2.4 (8 BE)

Untersuchen Sie, ob die Funktion h mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \text{ (siehe Aufgabe 1)} \\ g(x) & \text{für } x \geq 0 \text{ (siehe Aufgabe 2)} \end{cases}$$

an der Nahtstelle $x = 0$ stetig ist, begründen Sie, dass die Funktionswerte von h an der Nahtstelle ein Minimum aufweisen, und geben Sie den Winkel an, unter dem die Graphen der beiden Teilfunktionen an der Nahtstelle aufeinandertreffen.

Mithilfe einer Konvexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstands von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite g, der Abstand des Schirms von der Linsenmitte heißt Bildweite b.
Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ gegeben, wobei mit f die Brennweite der Linse bezeichnet wird.
Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.
Dieser Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt $f = 50\,\text{mm}$. Die Einheit kann für die Berechnungen weggelassen werden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf $a = g + b$ in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g folgender funktionaler Zusammenhang besteht:

$$a(g) = \frac{g^2}{g-50}$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge D_a, wenn der Platzbedarf a durch die Länge des Schaukastens mit $3000\,\text{mm}$ begrenzt ist.

Teilaufgabe 3.3 (8 BE)

Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandsweite g_0 gibt, für die der Platzbedarf a minimal wird, berechnen Sie g_0 sowie den minimalen Platzbedarf $a(g_0)$ und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen g_0 und der zugehörigen Bildweite b_0 besteht.