

Fachabitur 2011 Mathematik T Geometrie B I

In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind in Abhängigkeit der Variablen $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p - q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} p - q \\ p \\ 2p - q \end{pmatrix}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Werte für p und q die Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht aufeinander stehen.

Setzen Sie nun $p = 2$ und $q = 1$. Daraus ergeben sich mit dem Koordinatenursprung O die Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ für die Punkte A und B .

Teilaufgabe 1.2.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E , in der die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O liegen. Geben Sie die Gleichung der Ebene E auch in Koordinatenform an.

Teilaufgabe 1.2.2 (7 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs O von der durch die Punkte A und B festgelegten Geraden g .

Bestimmen Sie auch den Punkt L auf der Geraden g , der die geringste Entfernung vom Ursprung hat.

[Teilergebnis: $L(1; -0,8; 1,6)$]

Teilaufgabe 1.2.3 (9 BE)

Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf der Geraden g . Die Strecke $[S_1 S_2]$ bildet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Koordinatenursprung O als Spitze. Dieses Dreieck besitzt die Flächenmaßzahl $A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4,2}$.

Fertigen Sie eine Lageskizze der Punkte O , A , B , L , S_1 und S_2 an und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 . Runden Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Zwischenergebnis: $|\overrightarrow{LS_1}| = 2$]

Die folgenden Gleichungen I, II und III stellen jeweils Ebenen in Koordinatenform dar:

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$\text{II} \quad x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{III} \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = c \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R}$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Bestimmen Sie für $c = 3$ die Lösung des Gleichungssystems und interpretieren Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen.