Fachabitur 2010 Mathematik T Infinitesimalrechnung A II

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \dfrac{x^2 - a\,x + 1}{x^2}$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Ermitteln Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ in der Nähe der Definitionslücke sowie für $|x| \to \infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

Teilaufgabe 1.3 (14 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die jeweils maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a, geben Sie diejenigen Werte von a an, für die der jeweilige Graph von f_a einen Extrempunkt hat, und ermitteln Sie dessen Art und Lage in Abhängigkeit von a.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$, $a > 0$ und $a < 0$.
[mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$]

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph von f_a einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Setzen Sie nun $a = 1$ und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-5 \le x \le 5$ den Graphen von f_1 mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1\text{LE} = 1\text{cm}$.

Teilaufgabe 1.6 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t im Punkt $P(1; f_1(1))$ an den Graphen von f_1 und zeichnen Sie die Tangente t in das Diagramm der Aufgabe 1.5 ein.

[mögliches Teilergebnis: $t_x = -x + 2$]

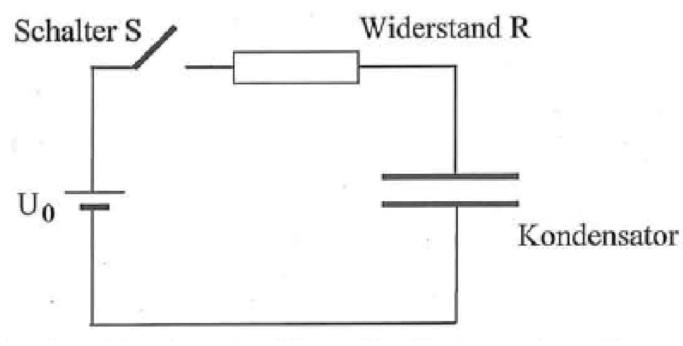
Teilaufgabe 1.7 (5 BE)

Für $0 < k < 1$ schließen die Gerade mit der Gleichung $x = k$, der Graph von f_1 und die Tangente t ein endliches Flächenstück A_k ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück für $k = 0,5$ im Diagramm der Aufgabe 1.5 und zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(k)$ der Fläche A_k in Abhängigkeit von k gilt:
$A(k) = \dfrac{k^2 + k \cdot \ln(k) + 1}{k} - \dfrac{k^2 + 3}{2}$

Teilaufgabe 1.8 (6 BE)

Beweisen Sie zunächst, dass gilt: $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ k>0}} [k \cdot \ln(k)] = 0$. Untersuchen Sie dann, ob der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ k>0}} A(k)$ existiert, und erklären Sie, was Ihr Ergebnis geometrisch bedeutet.

Ein Doppelschicht-Kondensator ist entsprechend der gegebenen Schaltung mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, die eine konstante Spannung $U_0 = 5,00\,\mathrm{V}$ liefert. Der Widerstand R des Stromkreises beträgt $10\,\Omega$.
Wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Schalter S geschlossen, beginnt der Kondensator sich aufzuladen. Der zeitliche Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung in
Volt (V) wird beschrieben durch die Gleichung:
$U_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t})$, wobei $\alpha = 2,50 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$



Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} U_C(t)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Grenzwerts.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Kondensatorspannung $U_C(t)$ sowie für die am Widerstand R anliegende Spannung $U_R(t)$ für $0 \leq t \leq 100\,\mathrm{s}$ mit einer Schrittweite von $\Delta\, t = 20\,\mathrm{s}$ und stellen Sie $U_C(t)$ und $U_R(t)$ in einem gemeinsamen Diagramm graphisch dar.
Hinweis: Offensichtlich gilt zu jedem Zeitpunkt $U_0 = U_C + U_R$.
Maßstäbe: 1cm entspricht 10s bzw. 1V.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)

Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Spannung U_C zur Zeit $t_0 = 0$ sowie ihren Grenzwert für $t \to \infty$. Stellen Sie eine Gleichung der (einseitigen) Tangente an den Graphen von U_C im Ursprung auf und zeichnen Sie diese Tangente in das Diagramm der Aufgabe 2.2 ein.

Teilaufgabe 2.4 (3 BE)

In dem gegebenen Stromkreis gilt für die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t die Gleichung: $I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$
Stellen Sie in einem neuen Diagramm die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar.

Teilaufgabe 2.5 (7 BE)

Die Stromstärke I ist definiert als die Ableitung der transportierten Ladung Q nach der Zeit t: $I(t) = \dot{Q}(t)$
Ermitteln Sie eine Gleichung, die den zeitlichen Verlauf der Ladung $Q(t)$ des Kondensators angibt, berechnen Sie $Q(60\,\mathrm{s})$ und veranschaulichen Sie diesen Wert im Diagramm der Aufgabe 2.4. Berechnen Sie außerdem $\lim\limits_{t \to \infty} Q(t)$.