Fachabitur 2010 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(4|0)$, schneidet die y-Achse im Punkt $(0|3)$ und hat an der Stelle $x_w = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt.

Teilaufgabe 1.1 (9 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$]

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheiten.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1,5 \leq x \leq 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

Gegeben sind die reellen Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{8}(a\,x^4 - 4x^3)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $D_{g_a} = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_{g_a} bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte mit waagrechter Tangente des Graphen G_{g_a} und deren Art.

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen G_{g_a}.

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f aus Teilaufgabe 1.1 und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen.
[Ergebnis: $a = 1$]

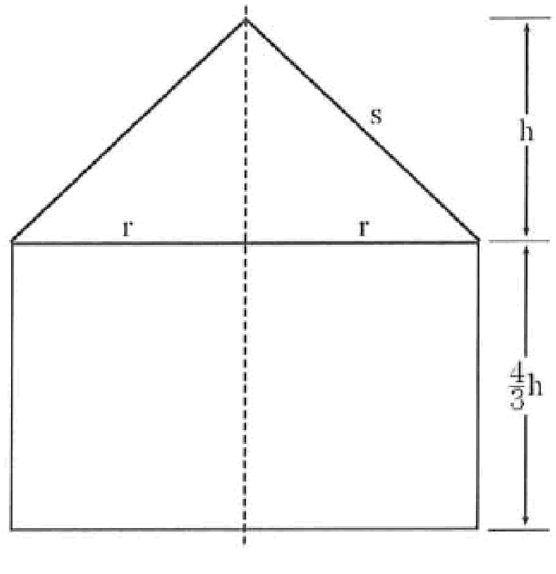
Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1, mit $g_1(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ im Bereich $-1,5 \leq x \leq 4,5$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 2.5 (5 BE)

Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts).
Die Mantellänge s des Kegels beträgt 15 m. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V : h \mapsto V(h)$ an.
[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$]

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)

Berechnen Sie h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert $V_{\max}$ des maximalen Volumens.