Fachabitur 2010 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P\left(4 \mid -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.

Nun wird $a = 3$ gesetzt. Die Funktion f_3 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich die Funktion f auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{8}\left(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x\right)$ darstellen lässt.

Teilaufgabe 2.2 (9 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-0,25 \leq x \leq 6$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion

$$A : t \mapsto A(t) \text{ mit } A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + a\,t^2 + b\,t + c) \text{ mit } a, b, c, \in \mathbb{R} \text{ und } t \in [0; 5]$$

beschrieben werden kann, wobei $A(t)$ die bedeckte Fläche (in mm^2) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet.
Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums ($t = 0$) die von den Bakterien bedeckte Fläche $1\,\text{mm}^2$ groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit 5mm^2 erreicht.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c und damit $A(t)$.
[Ergebnis: $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$]

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau.

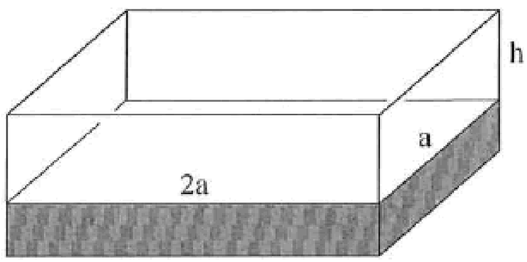
Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Ermitteln Sie die Wendestelle t_W der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 3.4 (3 BE)

Zeichnen Sie für $t \in [0; 5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe vorliegender Ergebnisse.

Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge $2a$, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll $4\,\text{m}^2$ betragen. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Bestimmen Sie das Volumen $V(a)$ des Daches in Abhängigkeit von a.
[Mögliches Ergebnis: $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$]

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)

Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V : a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)

Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h.