

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{8x}{x^2 + 4}$ mit dem Definitionsbereich

$D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

5 1. a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Nullstelle von f an.

7 b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f .

[Teilergebnis: Hochpunkt (2|2)]

5 c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Ursprung. Berechnen Sie $f(1)$ sowie $f(6)$ und skizzieren Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-6 \leq x \leq 6$.

3 d) Begründen Sie, dass f im Intervall $[-2;2]$ umkehrbar ist. Tragen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein.

Die Funktion $F : x \mapsto 4 \ln(x^2 + 4)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).

7 e) Der Graph von f und der Graph der Umkehrfunktion g schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt A dieses Flächenstücks.

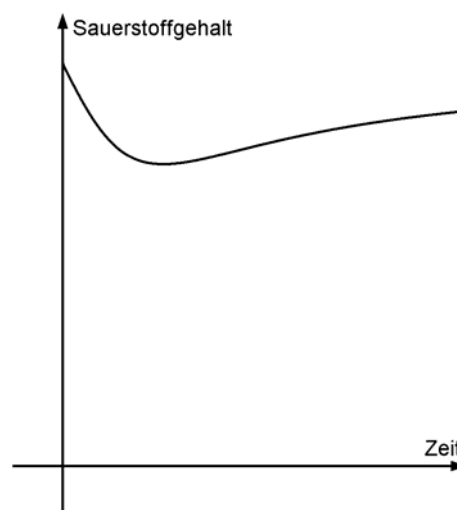
2. Unmittelbar nach der einmaligen, kurzzeitigen Einleitung von Abwasser in einen See kommt es zu einem Absinken des Sauerstoffgehalts im See. Da die Abwasserbelastung nicht zu hoch ist, führt die Selbstreinigung des Sees schließlich wieder zu einer Erhöhung des Sauerstoffgehalts.

Die Funktion $h : x \mapsto 8 - f(x)$,

$D_h = \mathbb{R}_0^+$, beschreibt näherungsweise den Sauerstoffgehalt des Sees an der Einleitungsstelle. Dabei ist x die

Anzahl der seit Einleitung des Abwassers vergangenen Tage, $h(x)$ die Maßzahl des Sauerstoffgehalts in $\frac{\text{mg}}{\ell}$.

Die Abbildung veranschaulicht den Verlauf des Graphen von h .



(Fortsetzung nächste Seite)

BE
4
5
4
40

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f hervorgeht. Nach wie vielen Tagen erreicht der Sauerstoffgehalt seinen kleinsten Wert und wie hoch ist dieser?

b) Berechnen Sie, wann der Sauerstoffgehalt wieder auf 95 % des ursprünglichen Wertes angestiegen ist.

c) Der mittlere Sauerstoffgehalt (in $\frac{\text{mg}}{\ell}$) an der Einleitungsstelle ist für einen Zeitraum von 20 Tagen nach Einleitung des Abwassers

gegeben durch $\frac{1}{20} \int_0^{20} h(x) dx$. Bestimmen Sie damit den mittleren

Sauerstoffgehalt für diesen Zeitraum.