GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $P(-8\,|\,-4\,|\,1)$ und $Q(7\,|\,8\,|\,17)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 1. a) Bestimmen Sie den Geradenpunkt R zum Parameterwert $\lambda = 30$ und zeigen Sie, dass Q nicht auf der Geraden g liegt.

6 b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt Q und die Gerade g enthält, in Normalenform. Welche besondere Lage hat diese Ebene im Koordinatensystem?

[mögliches Teilergebnis: $E: 4x_2 - 3x_3 + 19 = 0$]

6 c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(7\,|\,-4\,|\,1)$ Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade g ist. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes Q von der Geraden g. [Ergebnis: $d = 20$]

2 d) Der Punkt Q' entsteht durch Spiegelung des Punktes Q an der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q'.

[Ergebnis: $Q'(7\,|\,-16\,|\,-15)$]

9 e) Begründen Sie, dass das Viereck $QPQ'R$ eine Raute ist, und ermitteln Sie deren Flächeninhalt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an, die die gegenseitige Lage der Geraden g und der Punkte Q, P, Q', R und F veranschaulicht. Wählen Sie hierfür die Ebene E als Zeichenebene.

8 f) Berechnen Sie alle Innenwinkel der Raute und den Abstand h paralleler Rautenseiten. [Teilergebnis: $h = 24$]

2. In der Ebene E liegt ein Gitter mit kongruenten rautenförmigen Öffnungen. Eine dieser Rauten ist das Viereck $QPQ'R$. Zudem ist eine Kugel mit Radius r = 13 gegeben.

2 a) Begründen Sie, dass diese Kugel nicht durch die Gitteröffnungen passt.

5 b) Die Kugel liegt so in der Öffnung $QPQ'R$, dass sie alle 4 Seiten dieser Raute berührt. Berechnen Sie den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Gitterebene E.

40

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(1|2|0)$, $B(3|0|2)$ und $C(5|5|2)$ ein Dreieck in einer Ebene E fest. Die Gerade g enthält den Punkt B und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

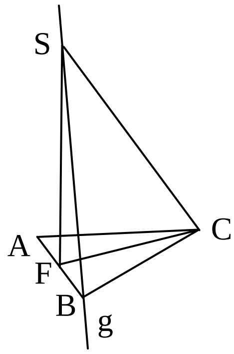
7 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und berechnen Sie alle Innenwinkel dieses Dreiecks.

5 b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(2|1|1)$ Mittelpunkt der Strecke [AB] ist, und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in Normalenform, bezüglich der die Punkte A und B zueinander symmetrisch sind.

[mögliches Ergebnis: $G: x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0$]

4 c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene G.

[Ergebnis: $S(-3|3|8)$]



6 d) Bestätigen Sie, dass die Gerade FS senkrecht auf der Ebene E steht, und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Punkt F auf dem Kreis in der Ebene G mit Durchmesser [SC] liegt.

5 2. a) Bei der Rotation des rechtwinkligen Dreiecks FCS um die Achse FS entsteht ein gerader Kegel K_1. Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.

6 b) Der Kegel K_1 schneidet die Ebene G im Dreieck CSC^*. Berechnen Sie die Koordinaten von C^* und zeichnen Sie das Dreieck CSC^* in wahrer Größe (1 LE entspricht 1 cm; sinnvolle Rundung der Längen).

4 c) Es sei r der Radius der größten Halbkugel mit Grundfläche in E, die dem Kegel K_1 einbeschrieben werden kann.
Beschreiben Sie einen Weg zur rechnerischen Bestimmung von r (Rechnungen nicht erforderlich).

3 d) Lässt man das Dreieck FCS um die Achse FC rotieren, so entsteht ein Kegel K_2.
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Schlussfolgerung falsch ist: „Weil bei K_2 im Vergleich zu K_1 Höhe und Grundkreisradius nur vertauscht sind, müssen K_1 und K_2 das gleiche Volumen besitzen.“

40