

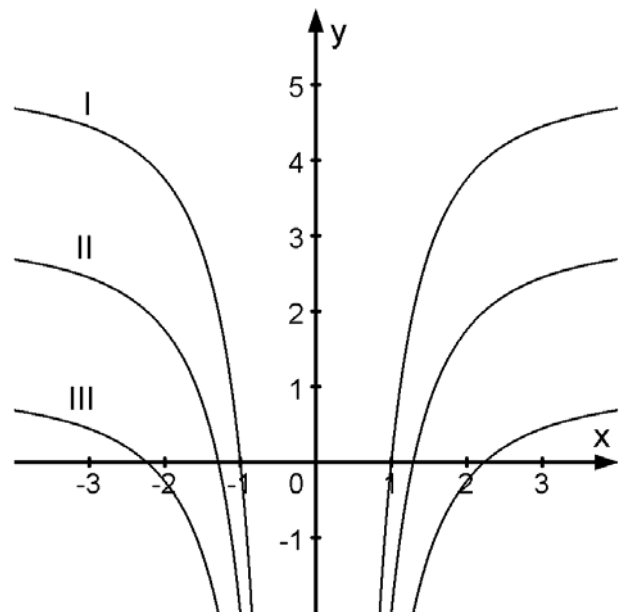
BE

**II.**

Gegeben ist die Schar von Funktionen  $f_a : x \mapsto \frac{ax^2 - 5}{x^2}$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  und Definitionsbereich  $D_a = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Der Graph von  $f_a$  wird mit  $G_a$  bezeichnet.

- 3 1. a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von  $G_a$  und die zwei Nullstellen von  $f_a$ . [Teilergebnis:  $x_1 = \sqrt{\frac{5}{a}}$ ]
- 3 b) Begründen Sie, dass  $y = a$  Asymptote von  $G_a$  ist. Untersuchen Sie das Verhalten von  $f_a$  an der Definitionslücke.
- 5 c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $f_a$ . [Zur Kontrolle:  $f_a'(x) = \frac{10}{x^3}$ ]

- 5 d) Die Abbildung zeigt drei Graphen der Schar zu *ganzzahligen* Parameterwerten  $a$ . Geben Sie an, zu welchem  $a$  die Graphen I, II und III jeweils gehören, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



(Fortsetzung nächste Seite)

2  
3  
6  
4  
9

2. a) Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte  $a$  die positive Nullstelle von  $f_a$  kleiner als 2,5 ist.

Für diese Parameterwerte  $a$  schließen der Graph  $G_a$ , die Koordinatenachsen, die Asymptote  $y = a$  und die Gerade  $x = 2,5$  im ersten Quadranten eine Fläche mit Inhalt  $A_a$  ein.

b) Markieren Sie diese Fläche für einen der Graphen in der Abbildung von Aufgabe 1d. Begründen Sie, dass für den Flächeninhalt  $A_a$  gilt:

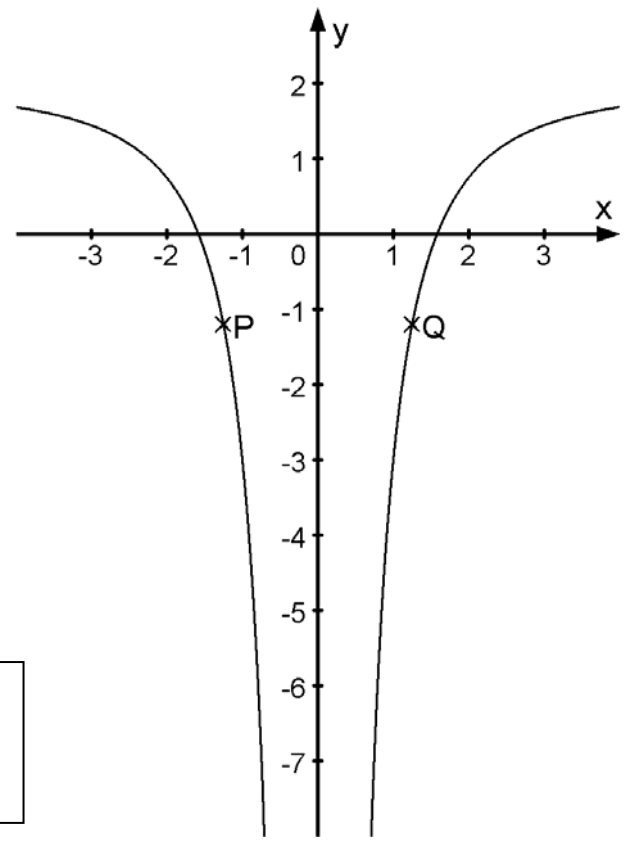
$$A_a = 2,5a - \int_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2,5} f_a(x) dx .$$

c) Zeigen Sie:  $A_a = 2\sqrt{5a} - 2$

(Hinweis: Für die Integration ist es hilfreich, den Term der Funktion  $f_a$  als Differenz darzustellen.)

d) Geben Sie ein Beispiel für zwei Parameterwerte  $a_1$  und  $a_2$  an, so dass sich die Flächeninhalte  $A_{a_1}$  und  $A_{a_2}$  um  $2\sqrt{5}$  unterscheiden.

3. Nun sei  $a = 2$ . Die nebenstehende Abbildung zeigt den zugehörigen Graphen  $G_2$ . Die Tangenten an  $G_2$  in den Kurvenpunkten  $P(-1,25 | -1,2)$  und  $Q(1,25 | -1,2)$  schließen mit der Asymptote  $y = 2$  ein Dreieck ein. Skizzieren Sie das Dreieck in die nebenstehende Abbildung und berechnen Sie seinen exakten Flächeninhalt.



**Name:**.....  
(vom Prüfling einzutragen)